

Analisi elastica dei telai a nodi spostabili

In questa lezione, dopo aver esposto brevemente alcune osservazioni sui metodi di analisi elastica dei telai a nodi spostabili indicati dall'Eurocodice 3, vengono svolti tre esempi di calcolo che mettono in evidenza le notevoli differenze nei risultati delle verifiche che si ottengono con il metodo della snellezza equivalente e con l'analisi elastica del secondo ordine.

I metodi di analisi elastica dei telai a nodi spostabili sono oggetto del paragrafo #5.2.6.2. dell'Eurocodice 3, che qui si riporta per comodità del lettore (fra parentesi quadre sono introdotte mie note)

5.2.6.2. Analisi elastica di telai a nodi spostabili

(1) Qualora si usi l'analisi elastica globale, si devono includere gli effetti del secondo ordine, direttamente, usando l'analisi elastica del secondo ordine, oppure indirettamente attraverso una delle seguenti alternative:

(a) mediante l'analisi elastica del primo ordine con amplificazione dei momenti prodotti dagli spostamenti laterali

(b) mediante l'analisi elastica del primo ordine con lunghezza di libera inflessione che tengano conto degli spostamenti laterali. [“metodo della snellezza equivalente”]

(2) *Quando si impiega l'analisi globale elastica del secondo ordine, per il progetto delle membrature si possono usare le lunghezze di libera inflessione nel piano in assenza di spostamenti laterali.*

(3) *Con il metodo della amplificazione dei momenti prodotti dagli spostamenti laterali, i momenti prodotti dagli spostamenti laterali ricavati da un'analisi elastica del primo ordine si raccomanda che siano incrementati moltiplicandoli per il rapporto:*

$$1/(1-V_{sd}/V_{cr})$$

(4) *Si raccomanda di non utilizzare il metodo dell'amplificazione dei momenti prodotti dagli spostamenti laterali quando il rapporto rispetto al carico critico sia maggiore di 0.25.*

(5) *I momenti prodotti dagli spostamenti laterali sono quelli associati con la traslazione orizzontale della sommità del piano in rapporto alla parte inferiore di quel piano. Essi sono generati dai carichi orizzontali e possono pure essere causati dai carichi verticali qualora la struttura oppure i carichi siano asimmetrici.*

(6) *In alternativa alla determinazione diretta di V_{sd}/V_{cr} , nel caso di telai a travi e colonne, come descritto in 5.2.5.2(4), si può usare la seguente approssimazione:*

$$\frac{V_{sd}}{V_{cr}} = \left(\frac{\delta}{h} \right) \left(\frac{V}{H} \right)$$

dove: δ , h , H , V sono definiti in 5.2.5.2(4).

(7) *Quando si usa il metodo dell'amplificazione dei momenti prodotti dagli spostamenti laterali, si raccomanda di usare per il calcolo delle membrature le lunghezze di libera inflessione nel piano in assenza di spostamenti laterali.*

(8) *Qualora per il calcolo delle colonne si usi l'analisi elastica del primo ordine con lunghezze di libera inflessione nel piano calcolate tenendo conto degli spostamenti laterali [“metodo della snellezza equivalente”], i momenti prodotti dagli spostamenti laterali nelle travi e nei collegamenti trave-colonna si raccomanda che siano amplificati almeno di 1,2 salvo che sia dimostrata l'idoneità di un valore inferiore attraverso una adeguata analisi.*

E' opportuno inoltre richiamare le prescrizioni sulle imperfezioni:

5.2.4.1. Principi

- (1) Possono essere usate adeguate imperfezioni geometriche equivalenti, i cui valori rispecchino i possibili effetti di tutti i tipi di imperfezioni [tensioni residue, mancanza di verticalità e di rettilineità, eccentricità minori nei collegamenti, ecc.].
- (2) Gli effetti delle imperfezioni devono essere considerati nei seguenti casi:
 - (a) analisi globale;
 - (b) analisi dei sistemi di controvento;
 - (c) calcolo delle membrature.

5.2.4.2. Modalità di applicazione

- (1) Omissis
- (2) Gli effetti delle imperfezioni del telaio forniti in 5.2.4.3. devono essere inclusi nell'analisi globale della struttura. Le forze ed i momenti risultanti vanno utilizzati nel calcolo delle membrature.
- (3) Omissis
- (4) Gli effetti delle imperfezioni delle membrature (vedere 5.2.4.5.) possono essere trascurati durante lo svolgimento della analisi globale, ad eccezione dei telai a nodi spostabili (vedere 5.2.5.2.) nel caso di membrature soggette a forze di compressione, che abbiano collegamenti resistenti a momento [quindi sono escluse le aste delle strutture reticolari] e per le quali:

$$\bar{\lambda} \geq 0.5 \sqrt{\frac{Af_y}{N_{Sd}}} \quad [\text{che equivale a } N_{Sd} > N_{cr}/4]$$

adottando una lunghezza di libera inflessione pari all'interpiano.

[Questa clausola, ricordando il significato dei simboli, può essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{\lambda}{\pi \sqrt{E/f_y}} \geq 0.5 \sqrt{\frac{Af_y}{N_{Sd}}} \rightarrow \frac{\lambda^2}{\pi^2 E/f_y} \geq 0.25 \frac{Af_y}{N_{Sd}} \rightarrow N_{Sd} \geq 0.25 \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \rightarrow N_{Sd} \geq \frac{N_{cr}}{4}$$

Gli effetti delle imperfezioni delle membrature devono quindi essere inclusi nell'analisi globale nel caso in cui l'azione assiale N_{Sd} sia maggiore di un quarto del valore critico per l'asta incernierata di lunghezza pari all'interpiano, ovvero del carico critico della mensola di ugual lunghezza. Questa condizione non si verifica in pratica quasi mai nelle strutture reali.]

5.2.4.3. Imperfezioni del telaio

- (1) Gli effetti delle imperfezioni devono essere considerati nell'analisi del telaio attraverso una imperfezione geometrica equivalente sotto forma di una imperfezione laterale iniziale.

5.2.4.5. Imperfezioni delle membrature

- (1) Normalmente gli effetti delle imperfezioni sul calcolo delle membrature devono essere incorporati usando le equazioni di instabilità indicate in questo Eurocodice [cioè le formule del capitolo 5.5: Resistenza delle membrature all'instabilità].
- (2) Qualora sia necessario (in accordo con 5.2.4.2. (4)) tener conto delle imperfezioni delle membrature nell'analisi globale, si devono includere le imperfezioni in 5.5.1.3. e si deve svolgere una analisi globale del secondo ordine [che comprende e supera le verifiche delle membrature incluse nelle equazioni di instabilità].

Osservazioni

Di deve innanzi tutto sottolineare il fatto che tutti i metodi di verifica esposti sono in qualche modo approssimati e che non esiste un metodo esatto. Il motivo risiede nel fatto che il comportamento delle aste reali è influenzato da imperfezioni, chiamate imperfezioni delle membrature (effetto P- δ) (soprattutto effetto delle tensioni residue), che vanno trattate statisticamente in base ai risultati sperimentali.

Il problema può dirsi risolto solamente per l'asta incernierata caricata di punta, per la quale l'Eurocodice 3 fornisce le curve "regolamentari" valide per la produzione industriale europea. In alternativa vengono forniti i valori dell'imperfezione geometrica equivalente $e_{0,d}$ (#5.5.1.2.(4)) con i quali si può calcolare la resistenza all'instabilità $N_{b,Rd}$ con un'analisi del secondo ordine, verificando la sezione soggetta a $N_{b,Rd}$ e al momento $N_{b,Rd} \cdot \delta$, essendo δ la deformazione del secondo ordine che può essere calcolata con la formula approssimata $\delta = e_{0,d} / (1 - N_{Sd} / N_{cr})$.

Già per l'asta incernierata soggetta anche ad azioni flettenti non sono disponibili metodi "esatti" perché l'influenza delle imperfezioni delle aste reali in presenza di azioni flettenti è diversa da quella con sola azione assiale, tanto che tale influenza è praticamente nulla in assenza di carico assiale. I vari metodi di verifica proposti sono quindi un compromesso per tener conto sia delle imperfezioni delle membrature (effetto P- δ), sia dell'effetto del secondo ordine (effetto P- Δ).

Le imperfezioni delle membrature, essendo influenzate prevalentemente dalle tensioni residue, rappresentano in qualche modo una non linearità del materiale, che però non è di tipo deterministico e quindi non può essere semplicemente introdotta in un'analisi non lineare, ma va trattata statisticamente. L'effetto del secondo ordine (effetto P- Δ), che incrementa le azioni trasversali dei carichi esterni, è invece facilmente calcolabile con gli attuali codici di calcolo.

Le cosiddette imperfezioni del telaio (#5.2.4.3.) consentono solo in parte di ridurre le differenze fra i risultati che si ottengono con i vari metodi, in particolare con l'analisi diretta del secondo ordine e con il metodo della snellezza equivalente, differenze che verranno messe in evidenza negli esempi di calcolo esposti nel seguito.

Il motivo principale di tali differenze risiede nel fatto che con il metodo della snellezza equivalente si adotta per la verifica della membratura la snellezza elastica dell'asta inserita nel telaio a nodi spostabili con i momenti del primo ordine, mentre per la verifica con la teoria del secondo ordine si adotta la snellezza elastica che avrebbe l'asta nel telaio a nodi fissi con i momenti del secondo ordine.

Esempio 1

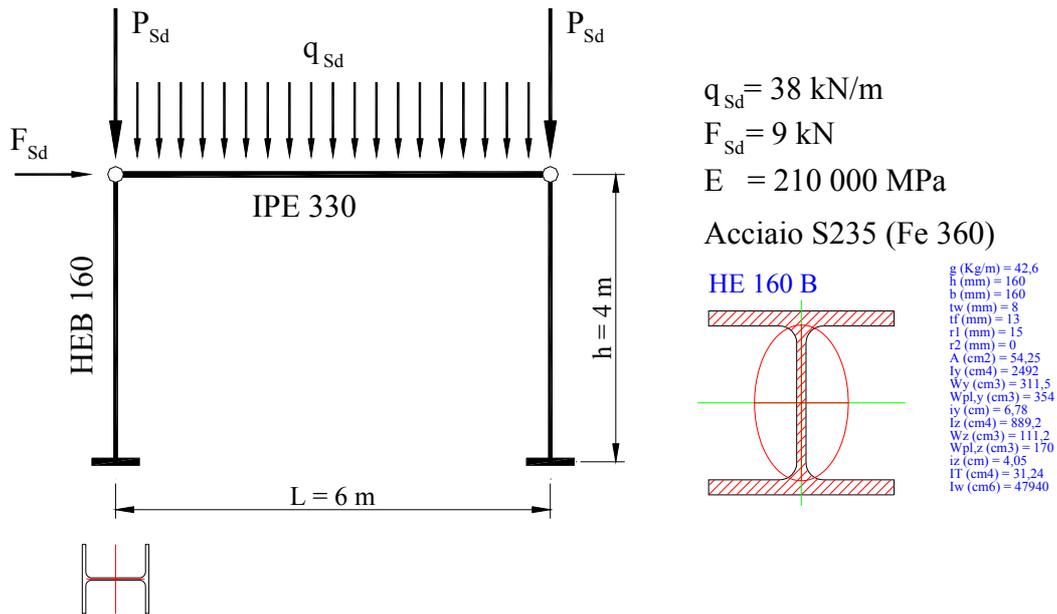


Fig. 1 - Schema telaio

Un edificio è costituito da una serie di telai come in figura 1, posti ad interasse di 5 m, fra loro controventati. Il carico orizzontale $F_{Sd} = 9 \text{ kN}$ è determinato dall'azione del vento, con pressione caratteristica di $0,6 \text{ kN/m}^2$ che agisce sulla baracatura appoggiata alla base e in sommità, scaricando sul nodo del telaio la forza di progetto:

$$F_{Sd} = 1,5 \cdot 0,6 \cdot 2 \cdot 5 = 9 \text{ kN}$$

Si calcoli il massimo valore dell'azione assiale di progetto $N_{Sd} = P_{Sd} + q_{Sd} \cdot L/2$ sopportabile dai pilastri, supponendo che i pilastri siano controventati fuori piano in modo continuo.

Ciascun pilastro è soggetto all'azione assiale N_{Sd} e al momento flettente indotto dal carico esterno di progetto $F1_{Sd} = 4,5 \text{ kN}$. Il pilastro viene predimensionato allo stato limite di servizio (EC3 #4.2.2.(4)):

$$\text{spostamento laterale alla sommità delle colonne} < h/300 = 13,3 \text{ mm}$$

Adottando un profilato HEB 160, il carico di esercizio $F1 = F1_{Sd}/1,5 = 3 \text{ kN}$ provoca uno spostamento di 12,2 mm.

Per le verifiche allo stato limite ultimo si deve considerare l'imperfezione geometrica ϕ del telaio (Fig. 2a):

$$\phi = K_s K_c \phi_0 = 1 \cdot 1 \cdot 1/200 = 1/200 \quad (\text{EC3 \#5.2.4.3.})$$

L'imperfezione geometrica ϕ può essere sostituita dalla forza orizzontale H_{eq} agente su ciascun pilastro:

$$H_{eq} = \phi N_{Sd}$$

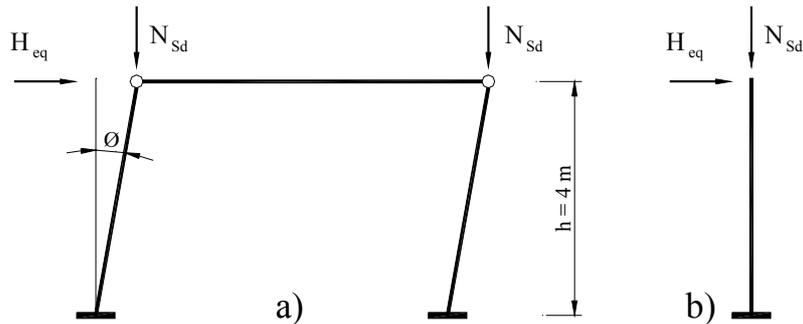


Fig. 2 - Imperfezione geometrica equivalente

In definitiva si tratta di determinare il valore massimo di N_{Sd} per la mensola caricata come in figura 2b):

$$H_{Sd} = F1_{Sd} + \phi N_{Sd} = 4.5 + N_{Sd} / 200 \text{ kN}$$

il carico critico della mensola è

$$N_{cr} = \pi EJ / l_0^2 = 807.6 \text{ kN} \quad (l_0 = 8 \text{ m})$$

La resistenza all'instabilità della mensola, in assenza di azioni flettenti è:

$$N_{b,Rd} = \chi A f_y / \gamma_{M1} = 519.7 \text{ kN} \quad (\chi = 0.4484; \gamma_{M1} = 1.1)$$

Metodo della "snellezza equivalente"

Per calcolare il valore massimo di N_{Sd} possiamo usare il metodo detto della "snellezza equivalente" (EC3 #5.2.6.2. (1) "(b) mediante l'analisi elastica del primo ordine con lunghezze di libera inflessione che tengano conto degli spostamenti laterali", cioè con $l_0 = 8 \text{ m}$.

Dopo alcuni tentativi si ottiene il valore massimo di N_{Sd} :

$$N_{Sd,max} = 277 \text{ kN} \ll N_{b,Rd} = 519.7 \text{ kN}$$

che soddisfa la verifica a presso-flessione (EC3 #5.5.4.: Flessione e compressione assiale) con:

$$M_{Sd} = (4.5 + 277/200) \cdot 4 = 23.54 \text{ kNm} \quad (\text{v. Fig. 3}).$$

Verifica Presso-Flessione - EC3 #5.5.4.

HE 160 B Acciaio S235 (Fe360) f_y (N/mm²) 235

N_{Sd} [kN] 277

	Inflessione attorno all'asse	
	y - y	z - z
l_0 [m]	8	0
Snellezza λ	118,	0
$N_{b,Rd}$ [kN]	519,7	1 159
M_Q [kNm]	23,54	0
β_M	1,4	1,4
μ	-1,371	0,529
k	1,5	0,885
$M_{e,Rd}$ [kNm]	75,63	36,32
M_{Sd} [kNm]	23,54	0

Resistenza della sezione 0,131 OK ?

Instabilità flessio-torsionale 0,55 OK ?

Flessione e compressione assiale - Classe 1 - EC3 #5.5.4.(1)

$$\frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd,min}} + \frac{k_y M_{y,Sd}}{M_{ey,Rd1}} + \frac{k_z M_{z,Sd}}{M_{ez,Rd1}} = 0,533 + 0,467 + 0 = 1,0$$

OK

Fig. 3 – Verifica a presso-flessione (programma Profili)

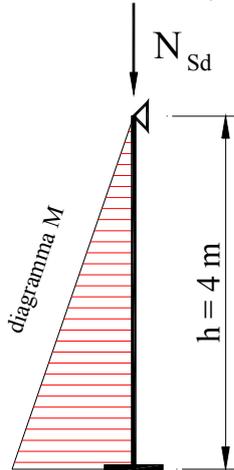
Si noti che per la verifica della membratura si è usato il valore di k che corrisponde al caso di trave appoggiata di luce l_0 con una distribuzione del momento del primo ordine lineare con massimo in mezzaria (v. Fig. 3).

Il giunto di base della colonna andrà verificato per un momento $M=1.2 \cdot 23.54=28.25$ kNm in accordo con EC3 #5.2.6.2.(8).

Analisi globale elastica del secondo ordine

Il momento del secondo ordine alla base del pilastro si può calcolare, in questo caso, con la formula approssimata:

$$M^{II} = M^I / (1 - N_{Sd} / N_{cr}) = 4 (4.5 + N_{Sd} / 200) / (1 - N_{Sd} / 807.6)$$



Per la verifica a presso-flessione della membratura si usa la lunghezza di libera inflessione del telaio a nodi fissi (EC3 #5.2.6.2.(2)).

Si deve quindi verificare la membratura nelle condizioni di carico e di vincolo ($l_0 = 0.7 \cdot h = 2.8$ m) di figura 4.

Dopo alcuni tentativi si ottiene il valore di $N_{Sd,max}$ (v. Fig. 5)

$$N_{Sd,max} = 377 \text{ kN} \quad \text{con} \quad M^{II} = 47.90 \text{ kNm}$$

$$P_{Sd,max} = 377 - 114 = 263 \text{ kN}$$

La verifica è notevolmente meno gravosa (incremento del 36% del carico assiale $N_{Sd,max}$) di quella eseguita con il metodo della snellezza equivalente.

Fig. 4

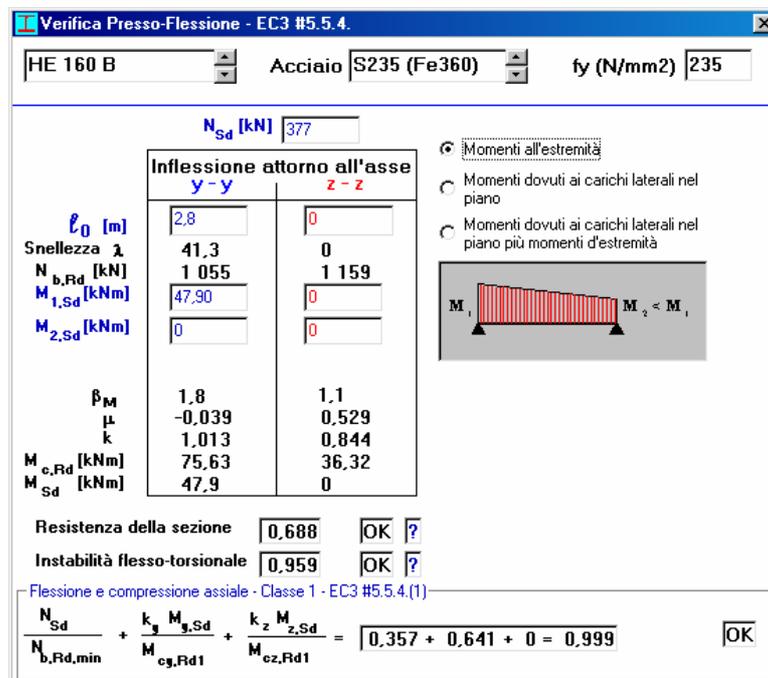


Fig 5 – Verifica a presso-flessione

Metodo della amplificazione dei momenti

Il moltiplicatore critico:

$$m_{cr} = N_{cr} / N_{Sd,max} = 807.6 / 377 = 2.14$$

è inferiore a 4 e pertanto non si potrebbe impiegare “l’analisi elastica del primo ordine con amplificazione dei momenti prodotti dagli spostamenti laterali” (EC3 #5.2.6.2.(4)). Nel caso

presente tuttavia l'applicazione di questo metodo coincide con l'applicazione dell'analisi elastica del secondo ordine.

Verifica della trave

La trave è soggetta al momento flettente:

$$M_{Sd} = q_{Sd} L^2/8 = 38 \cdot 6^2 / 8 = 171 \text{ kNm}$$

Supponendo che sia efficacemente controventata dall'impalcato, è sufficiente verificare che il momento resistente plastico di progetto sia maggiore del momento sollecitante:

$$M_{c,Rd} = 171.8 > 171 \text{ kNm}$$

O.K.

Verifica a taglio (EC3 #5.4.6.):

$$V_{Sd} = 38 \cdot 6 / 2 = 114 \text{ kN}$$

$$V_{pl,Rd} = A_v (f_y / \sqrt{3}) / \gamma_{M0} = 3081 \cdot 123.3 / 1000 = 380 > 114 \text{ kN}$$

Osservazioni

Si noti che nel calcolo del telaio non si sono introdotte le imperfezioni delle membrature (cioè l'imperfezione di freccia iniziale $e_{0,d}$ specificata in EC3 #5.5.1.3.) perché il loro effetto è incorporato nell'equazione di instabilità usata per la verifica a presso-flessione attraverso il parametro k . Gli effetti delle imperfezioni delle membrature devono essere introdotti nell'analisi globale solo se (EC3 #5.2.4.2.(4)):

$$\bar{\lambda} > 0.5 \sqrt{\frac{A f_y}{N_{Sd}}}$$

con snellezza calcolata adottando una lunghezza di libera inflessione pari all'interpiano. Nel nostro caso si ha:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{4000 / 67.8}{93.9} = 0.6283 \ll 0.5 \sqrt{\frac{A f_y}{N_{Sd}}} = 0.5 \sqrt{\frac{5425 \cdot 235}{318000}} = 1.001$$

Questa clausola, ricordando il significato dei simboli ed operando semplici sostituzioni, equivale alla seguente:

$$N_{Sd} > 0.25 N_{cr}$$

con N_{cr} calcolato con la lunghezza di libera inflessione pari all'interpiano. Dovrebbe cioè essere $N_{Sd} > 807.6 \text{ kN}$, carico critico della mensola.

Esempio 2

Verificare il telaio di figura 6 costituito dagli stessi profilati dell'esempio 1, ma incernierato alla base. I carichi hanno i valori massimi ricavati nell'esempio 1 con l'analisi globale elastica del secondo ordine.

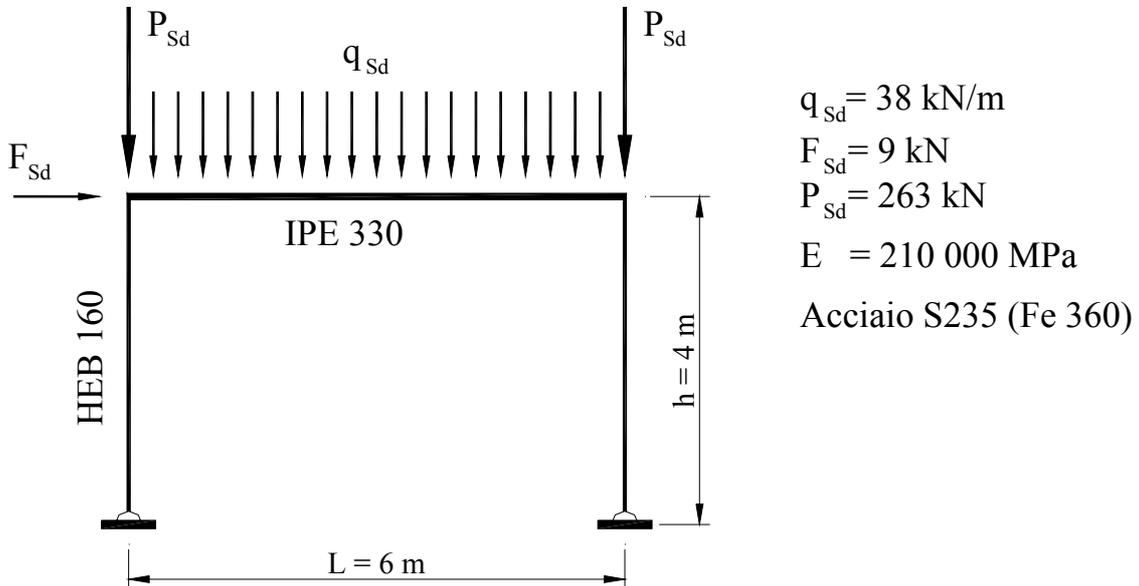


Fig. 6 – Schema del telaio

Tenendo conto dell'imperfezione geometrica ϕ , il telaio va calcolato con le azioni di figura 7.

$$H_{Sd} = F_{Sd} + \phi (2 P_{Sd} + q_{Sd} L) = 9 + (526 + 228) / 200 = 12.77 \text{ kN}$$

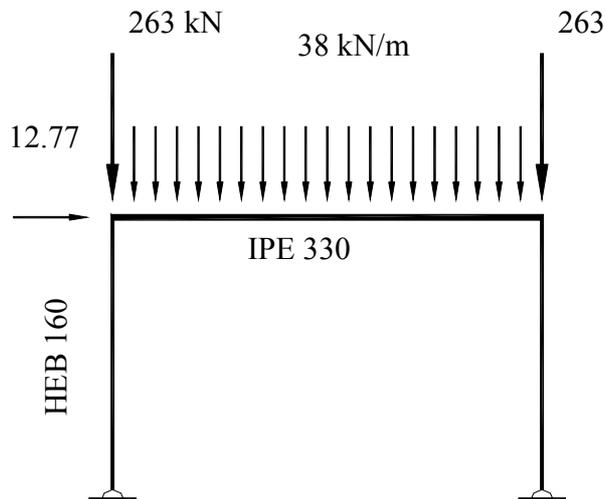


Fig. 7 – Azioni di progetto

Nelle figure 8, 9, 10 sono riportati i risultati delle analisi eseguite con il programma Straus 7. Si noti il notevole incremento di deformazione dell'analisi del secondo ordine (le deformate di figura 8 e 9 sono nella stessa scala) e il basso valore dei moltiplicatore critico.

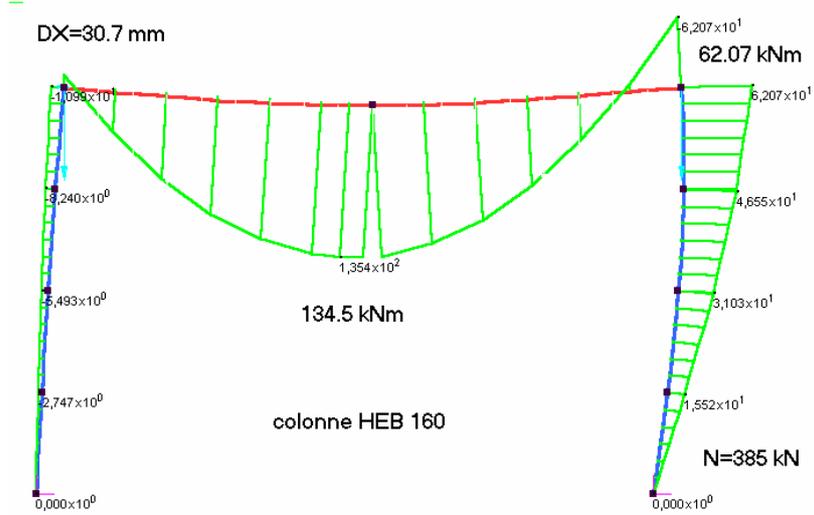


Fig. 8 – Analisi del primo ordine (Linear Static) con colonne HEB 160

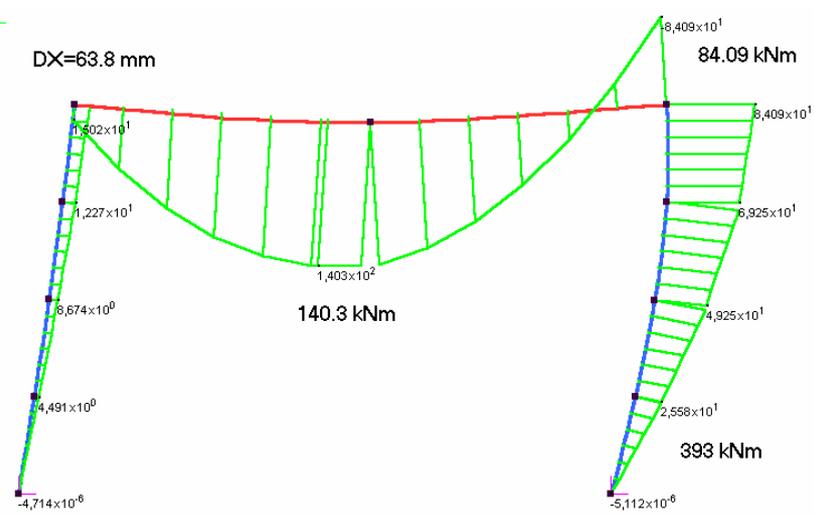


Fig. 9 – Analisi del secondo ordine (Non Linear Static) con colonne HEB 160

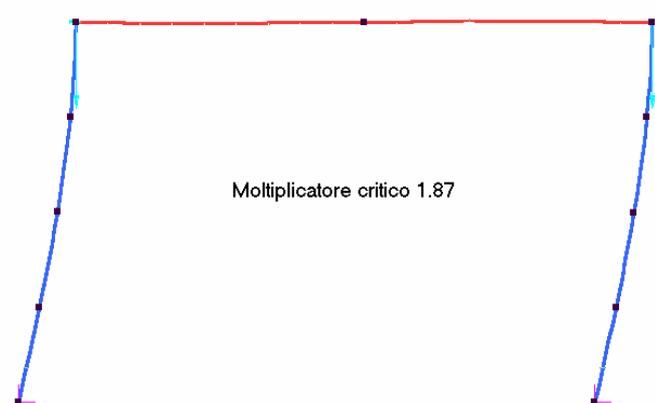


Fig. 10 – Moltiplicatore critico (Linear Buckling) con colonne HEB 160

L'analisi di buckling fornisce il valore del carico critico:

$$m_{cr} = 1.87 \rightarrow N_{cr} = 1.87 \cdot 385 = 720 \text{ kN}$$

al quale corrisponde una lunghezza di libera inflessione:

$$l_0 = \pi (EJ / N_{cr})^{0.5} = 8.47 \text{ m} \rightarrow \beta = l_0/h = 8.47/4 = 2.12$$

Metodo della "snellezza equivalente"

Con le sollecitazioni del primo ordine (Fig. 8) $N_{Sd} = 385 \text{ kN}$ e $M^I = 62.07 \text{ kNm}$ (valore vicino alla resistenza plastica 75.63) e con $l_0 = 8.47$, la formula di interazione dà come risultato $2.036 \gg 1$.

E' quindi necessario ridimensionare la struttura.

Analisi globale elastica del secondo ordine

Il momento sul pilastro $M^{II} = 84.09 \text{ kNm}$ (Fig. 9) è superiore alla resistenza plastica.

E' quindi necessario ridimensionare la struttura.

Ridimensionamento della struttura

La struttura deve essere ridimensionata. Si può intervenire sulla trave, sulle colonne o su entrambe. Per ottenere un comportamento analogo a quello della struttura dell'esempio 1, intervenendo solo sulla trave, si dovrebbe aumentare moltissimo la rigidezza (che dovrebbe essere teoricamente infinita). Conviene quindi operare sulle colonne, anche per rispettare la verifica allo stato limite di esercizio:

$$\text{spostamento} < h/300 = 13.3 \text{ mm}$$

mentre lo spostamento con i carichi di esercizio e con HEB 160 (Fig. 8) è di $30.7/1.5 = 20.5 \text{ mm}$.

Si sceglie il profilo **HEB 220**.

Nelle figure 11, 12 e 13 sono riportati i risultati delle nuove analisi. Si ha:

$$m_{cr} = 4.96 \rightarrow N_{cr} = 4.96 \cdot 385 = 1910 \text{ kN}$$

al quale corrisponde una lunghezza di libera inflessione:

$$l_0 = \pi (EJ / N_{cr})^{0.5} = 9.37 \text{ m} \rightarrow \beta = l_0/h = 9.37/4 = 2.34$$

Si noti che la snellezza della colonna è aumentata perché è diminuita l'efficacia del vincolo a rotazione offerto dalla trave.

Metodo della "snellezza equivalente"

Con il metodo della "snellezza equivalente", cioè con $l_0 = 9.37 \text{ m}$ e con le azioni interne del primo ordine $M^I = 94.2 \text{ kNm}$, $N_{Sd} = 385 \text{ kN}$ (Fig. 11), la formula di interazione dà come risultato $0.937 \cong 1$ (v. Fig. 14). Si noti che si è usato il diagramma dei momenti di estremità (Fig. 14) invece del diagramma MQ come in Fig. 3. Questa scelta è opinabile; con MQ la formula di interazione darebbe come risultato 1,082.

Analisi globale elastica del secondo ordine

Si verifica il pilastro con le azioni interne di figura 12 ($N_{Sd} = 387 \text{ kN}$ e $M^{II} = 99.53 \text{ kNm}$) e con la snellezza calcolata per il telaio a nodi fissi (v. Fig. 15). Si ottiene:

$$m_{cr} = 32 \rightarrow N_{cr} = 32 \cdot 377 = 12064 \text{ kN}$$

al quale corrisponde una lunghezza di libera inflessione:

$$l_0 = \pi (EJ / N_{cr})^{0.5} = 3.73 \text{ m} \rightarrow \beta = l_0/h = 0.932$$

La formula di interazione dà come risultato $0.785 \ll 1$. Vi è quindi un margine cospicuo per l'incremento delle azioni. Il carico P_{Sd} può essere incrementato di 298 kN, con il pilastro soggetto a $N_{Sd} = 688 \text{ kN}$, $M^{II} = 106.3 \text{ kNm}$ (Fig. 16), con un aumento del 79% dell'azione assiale ammissibile N_{Sd} rispetto alla verifica con il metodo della snellezza equivalente.

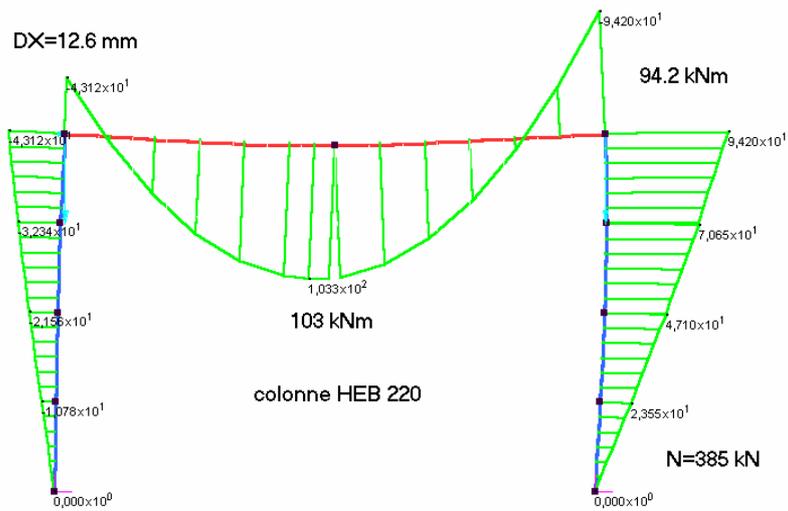


Fig. 11 - Analisi del primo ordine (colonne HEB 220)

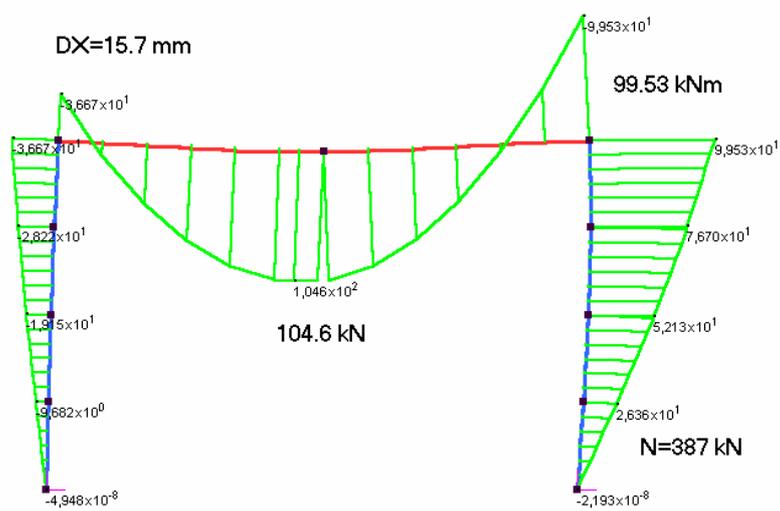


Fig. 12 – Analisi del secondo ordine (colonne HEB 220)

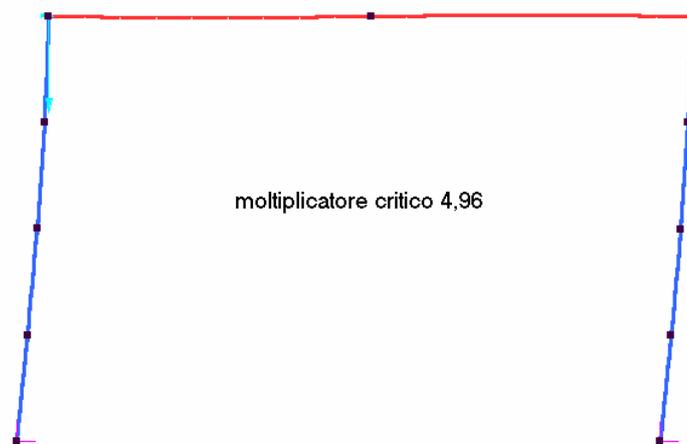


Fig 13 – Analisi di buckling (colonne HEB 220)

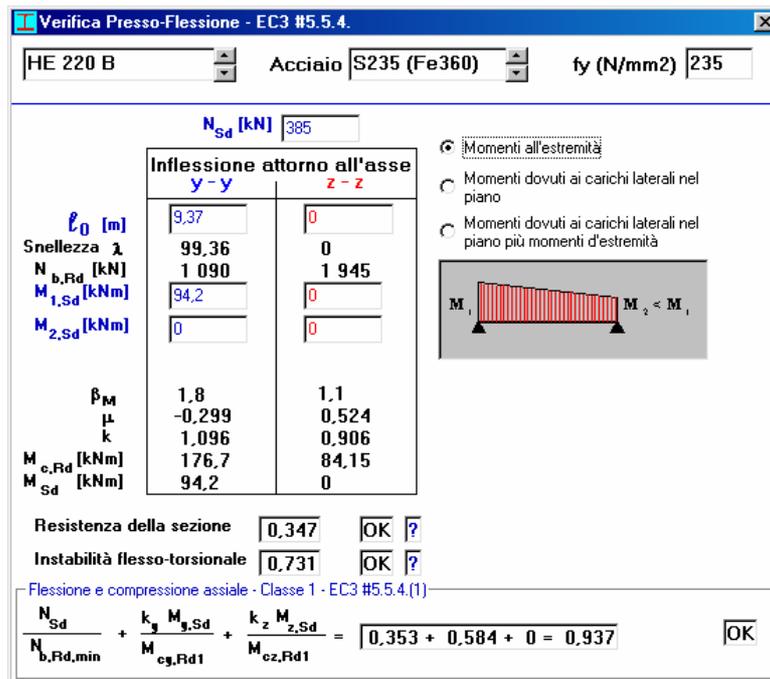


Fig 14 – Verifica con il metodo della snellezza equivalente

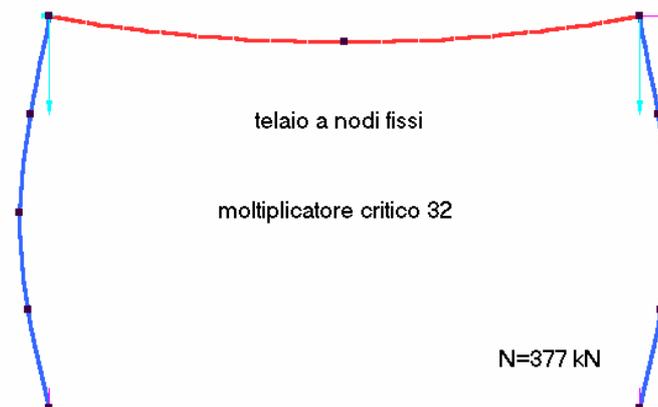


Fig. 15 – Analisi di buckling del telaio a nodi fissi

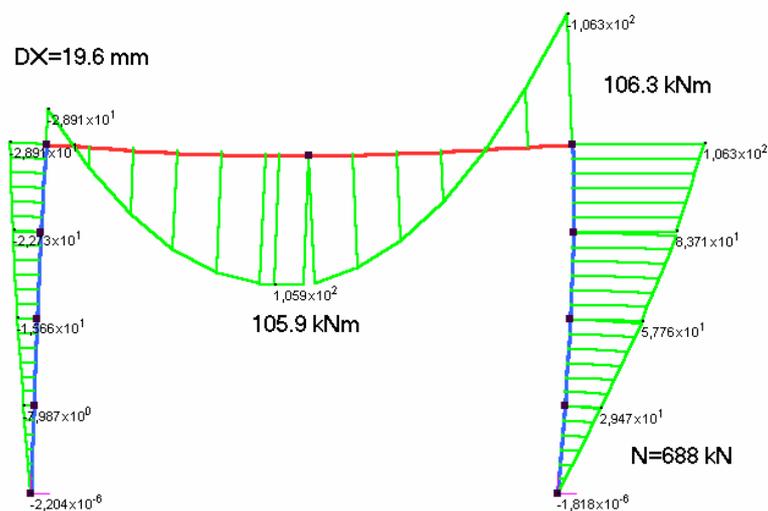


Fig. 16 – Sollecitazioni massime ammissibili

Metodo della amplificazione dei momenti

Il moltiplicatore critico $m_{cr} = 4.96$ è superiore a 4 e quindi si può impiegare il metodo della amplificazione dei momenti (EC3 #5.2.6.2.(4)). Vanno amplificati i momenti M' dovuti agli spostamenti laterali, ottenibili per differenza fra quelli di figura 11 e quelli di figura 17:

$$M' = 94.2 - 68.8 = 25.4 \text{ kNm}$$

Momento amplificato:

$$M'' = M'(1 - 1/m_{cr}) = 25.4/0.798 = 31.81$$

Il pilastro va quindi verificato per il momento:

$$M^{II} = 68.8 + 31.81 = 100.6 \text{ kNm}$$

valore leggermente superiore a quello ottenuto con l'analisi del secondo ordine (99.53). Per la verifica si adotta la stessa lunghezza di libera inflessione usata con l'analisi del secondo ordine.

Per il calcolo del moltiplicatore critico, se non si ha a disposizione un codice di calcolo appropriato, si può usare la formula approssimata dell'EC3 #5.2.6.2.(6):

$$\frac{1}{m_{cr}} = \frac{V_{Sd}}{V_{cr}} = \left(\frac{\delta}{h}\right)\left(\frac{V}{H}\right) = \left(\frac{12.6}{4000}\right)\left(\frac{754}{12.77}\right) = 0.186 \rightarrow m_{cr} = 5.38$$

Il valore è leggermente superiore (a sfavore di stabilità) rispetto a quello esatto (4.96). Per i valori introdotti nella formula si veda la figura 11 per δ e la figura 7 per H e per V ($V = 2 \cdot 263 + 38 \cdot 6 = 754$).

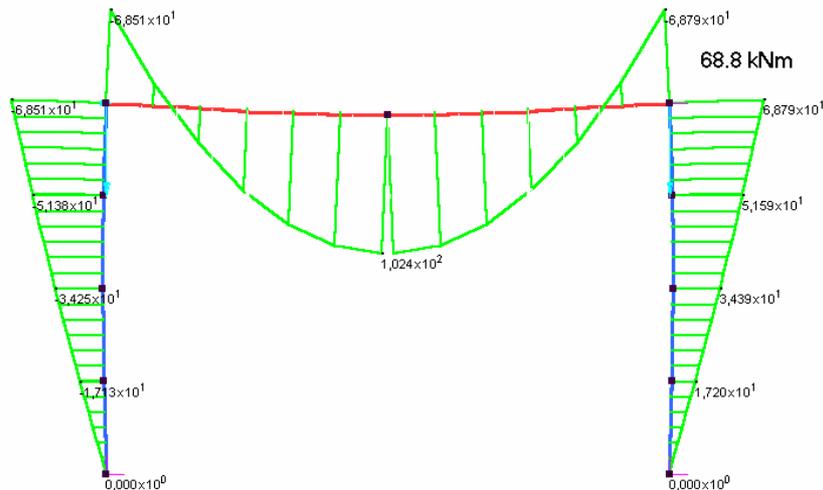


Fig. 17 – Analisi del primo ordine del telaio a nodi fissi

Osservazioni

La soluzione a portale incernierato richiede una maggiore quantità di acciaio (colonne HEB 220) rispetto alla soluzione con colonne incastrate alla base e trave semplicemente appoggiata (colonne HEB 160). Si ha però una diminuzione delle sollecitazioni in fondazione che può compensare il maggior costo della carpenteria metallica.

La trave risulta meno sollecitata ($M_{max} = 104$ contro 171 kNm). Si potrebbe quindi ridurre la sezione. La freccia della trave in mezzaria è ridotta ($L/390$ contro $L/220$).

Come nell'esempio 1 la verifica con il metodo della snellezza equivalente e l'analisi elastica del primo ordine risulta molto più gravosa ($N_{Sd,max} \cong 385$ kN) rispetto alla verifica basata sull'analisi elastica del secondo ordine ($N_{Sd,max} = 688$ kN) e lunghezza di libera inflessione in assenza di spostamenti laterali.

Esempio 3

Verificare il telaio di figura 18 costituito dagli stessi profilati dell'esempio 1, ma incastrato alla base. I carichi hanno i valori massimi ricavati nell'esempio 1 con l'analisi globale elastica del secondo ordine.

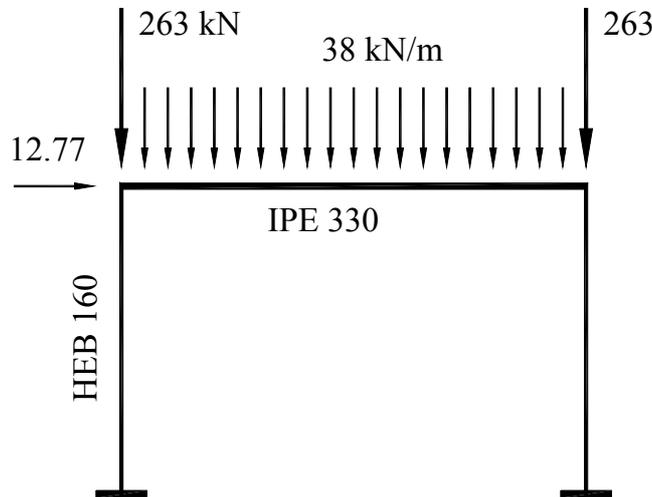


Fig. 18 – Schema telaio

Nelle figure 19, 20 e 21 sono riportati i risultati delle analisi. Si ha:

$$m_{cr} = 7.47 \rightarrow N_{cr} = 7.47 \cdot 381 = 2846 \text{ kN} \quad (\text{Fig. 21})$$

al quale corrisponde una lunghezza di libera inflessione:

$$l_0 = \pi (EJ / N_{cr})^{0.5} = 4.26 \text{ m} \rightarrow \beta = l_0/h = 4.26/4 = 1.06 \rightarrow \lambda = 62.8 \rightarrow \chi = 0.8008$$

Metodo della "snellezza equivalente"

Con il metodo della "snellezza equivalente", cioè con $l_0 = 4.26 \text{ m}$ e con le azioni interne del primo ordine $M1^I = 55.57$, $M2^I = -34.52 \text{ kNm}$ e $N_{Sd} = 381 \text{ kN}$ (Fig. 19), la formula di interazione dà come risultato $1.022 \approx 1$.

Analisi globale elastica del secondo ordine

Si verifica il pilastro con le azioni interne del secondo ordine $M1^{II} = 56.29$, $M2^{II} = -37.06 \text{ kNm}$ e $N_{Sd} = 382 \text{ kN}$ (v. Fig. 20) e con la snellezza calcolata per il telaio a nodi fissi (v. Fig. 22). Si ottiene:

$$m_{cr} = 24.3 \rightarrow N_{cr} = 24.3 \cdot 377 = 9161 \text{ kN}$$

al quale corrisponde una lunghezza di libera inflessione:

$$l_0 = \pi (EJ / N_{cr})^{0.5} = 2.37 \text{ m} \rightarrow \beta = l_0/h = 0.593 \rightarrow \lambda = 35.0 \rightarrow \chi = 0.9369$$

La formula di interazione dà come risultato $1.017 \approx 1$.

Metodo della amplificazione dei momenti

Il moltiplicatore critico $m_{cr} = 7.47$ è superiore a 4 e quindi si può impiegare il metodo della amplificazione dei momenti (EC3 #5.2.6.2.(4)). Vanno amplificati i momenti M' dovuti agli spostamenti laterali, ottenibili per differenza fra quelli di figura 19 e quelli di figura 24:

$$M1' = 55.57 - 43.43 = 12.14 \text{ kNm}$$

$$M2' = -34.52 + 21.03 = -13.49 \text{ kNm}$$

Momenti amplificati:

$$M1'' = M1'(1 - 1/m_{cr}) = 12.14/0.866 = 14.02$$

$$M2'' = M2'(1 - 1/m_{cr}) = -13.49/0.866 = -15.58$$

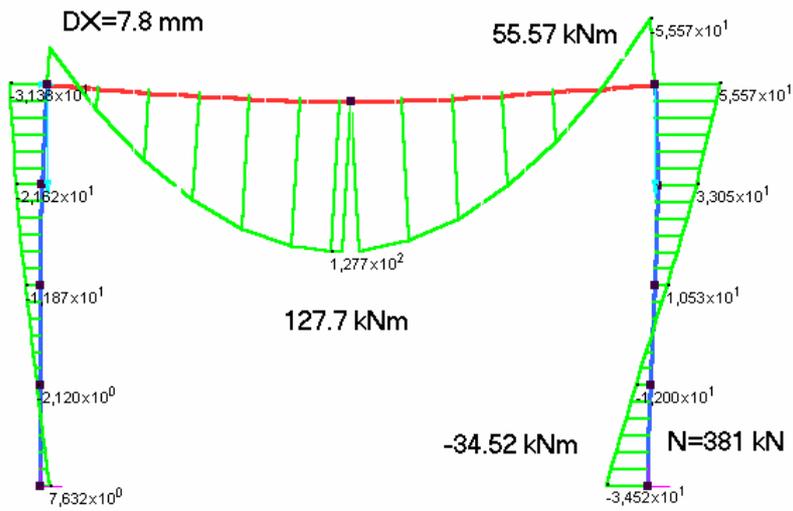


Fig. 19 – Analisi del primo ordine

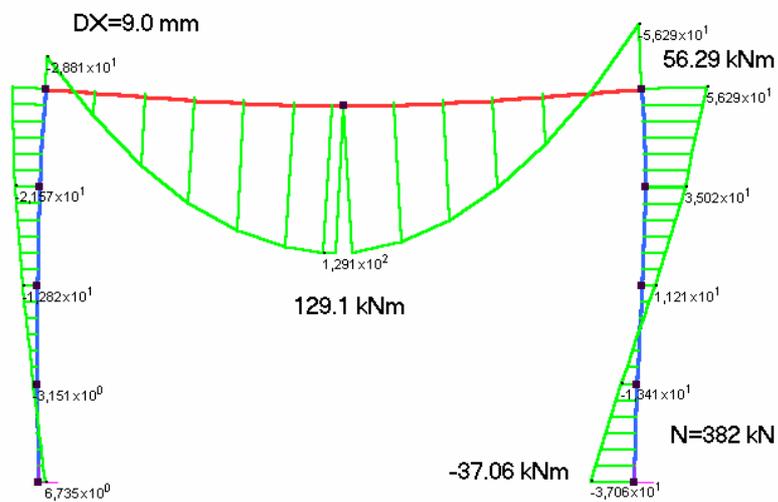


Fig. 20 – Analisi del secondo ordine

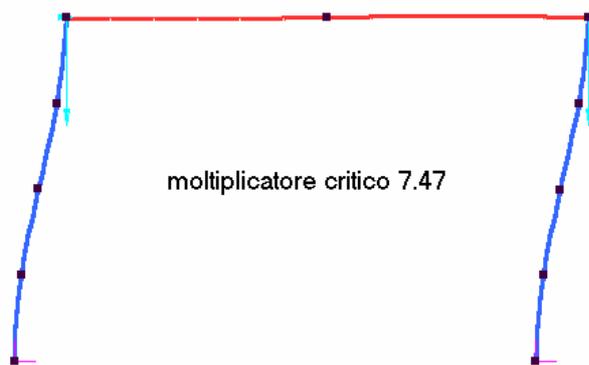


Fig. 21 – Analisi di buckling (nodi spostabili fissi)

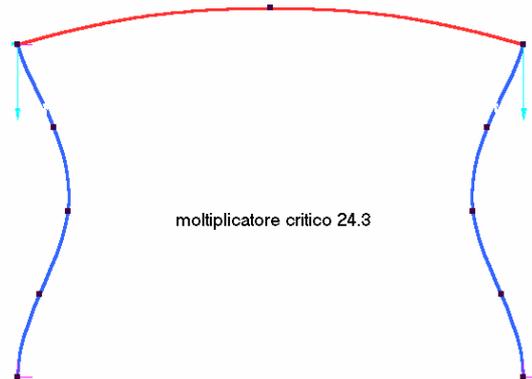


Fig. 22 – Analisi di buckling (nodi spostabili)

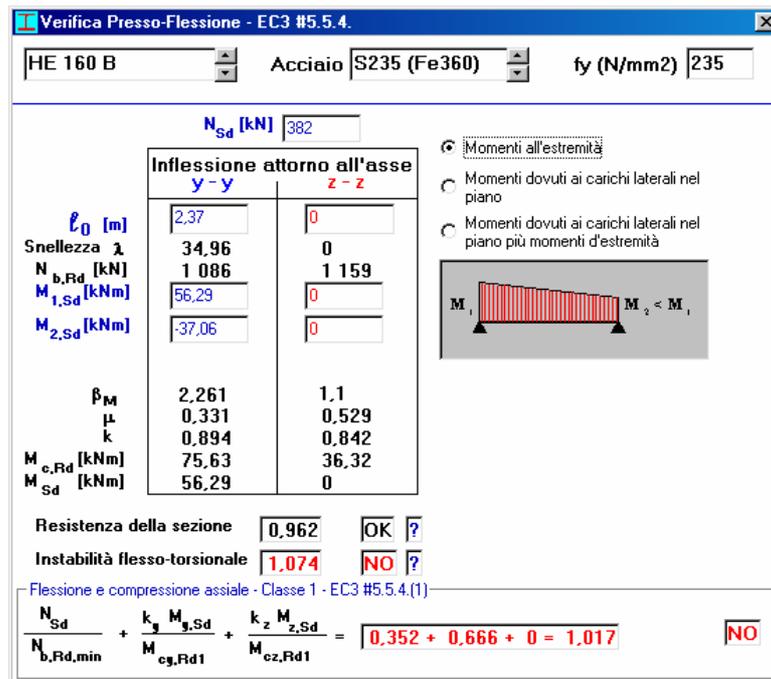


Fig. 23 – Verifica a presso-flessione

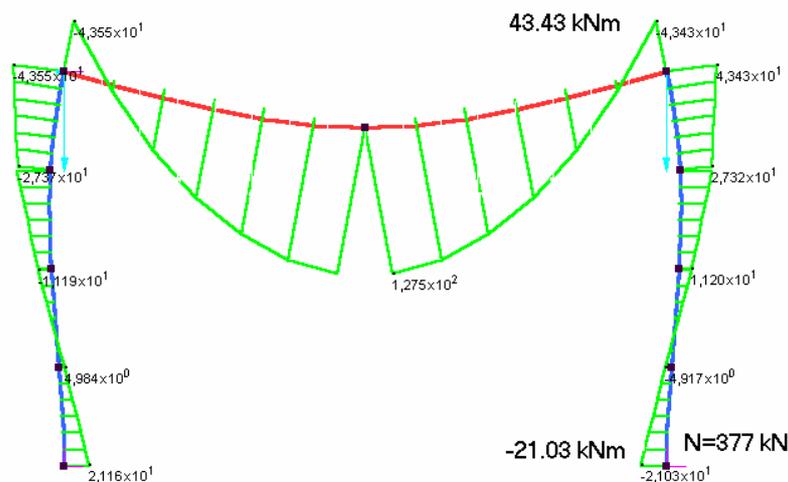


Fig. 24 – Analisi del primo ordine del telaio a nodi fissi

Il pilastro va quindi verificato per il momento:

$$M1^{II} = 43.43 + 14.02 = 57.45 \text{ kNm}$$

$$M2^{II} = -21.03 - 15.58 = -36.61 \text{ kNm}$$

valori leggermente superiori (a favore di stabilità) rispetto a quelli ottenuti con l'analisi del secondo ordine (56.29 e -37.06). Per la verifica si adotta la stessa lunghezza di libera inflessione usata con l'analisi del secondo ordine.

Per il calcolo dei moltiplicatore critico, se non si ha a disposizione un codice di calcolo appropriato, si può usare la formula approssimata dell'EC3 #5.2.6.2.(6):

$$\frac{1}{m_{cr}} = \frac{V_{sd}}{V_{cr}} = \left(\frac{\delta}{h}\right) \left(\frac{V}{H}\right) = \left(\frac{7.8}{4000}\right) \left(\frac{754}{12.77}\right) = 0.115 \rightarrow m_{cr} = 8.69$$

Il valore di m_{cr} è leggermente superiore (a sfavore di stabilità) rispetto a quello esatto (7.47). Per i valori introdotti nella formula si veda la figura 19 per δ e la figura 18 per H e per V ($V = 2 \cdot 263 + 38 \cdot 6 = 754$).

Osservazioni

In questo esempio il metodo della snellezza equivalente e l'analisi elastica del secondo ordine conducono a verifiche in buon accordo, mentre nell'esempio 1 (differenza del 36% nel valore di $N_{Sd,max}$) e soprattutto nell'esempio 2 (differenza del 79%) il secondo metodo si è dimostrato molto meno conservativo. Nasce quindi il dubbio che la verifica delle membrature con i risultati dell'analisi del secondo ordine e lunghezze di libera inflessione del telaio a nodi fissi sia applicabile al caso di aste con un vincolo a cerniera, come negli esempi 1 e 2.

I telai degli esempi 1 e 3, verificati con l'analisi elastica del secondo ordine, ammettono gli stessi carichi, anche se la snellezza dei pilastri dell'esempio 1 è molto superiore.

La trave dell'esercizio 3 risulta meno impegnata a flessione e quindi si potrebbe ridurre la sezione. Tuttavia, poiché una diminuzione di rigidità della trave implica un aumento delle sollecitazioni flessionali dei pilastri con conseguente necessità di un loro ridimensionamento, la convenienza di una diminuzione della sezione della trave va valutata in base al costo globale del telaio.